

۱

ابتدا، زاویه B را به دست می‌آوریم:

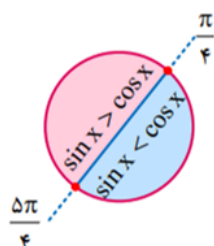
$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\Delta\pi}{9} + \frac{\gamma\pi}{36} = \frac{27\pi}{36} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \hat{B} = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

با توجه $\sin x \cos x > 0$ ، می‌توان فهمید که $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت هستند یعنی $(\sin x < 0, \cos x < 0)$ یا $(\sin x > 0, \cos x > 0)$ که این نشان‌دهنده این است که انتهای کمان x در ناحیه اول یا سوم مثلثاتی است. ببینید:

۲



$$\sin x - \cos x < 0 \Rightarrow \sin x < \cos x$$

از طرفی:



بنابراین ناحیه موردنظر برابر است با اشتراک نواحی آبی رنگ، یعنی:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

۱ انتهای کمان $\frac{7\pi}{9}$ در ناحیه دوم است. بنابراین: $\sin \frac{7\pi}{9} > 0$

۲ انتهای کمان $-\frac{9\pi}{7}$ در ناحیه دوم است. بنابراین: $\cos(-\frac{9\pi}{7}) < 0 \rightarrow -\cos(-\frac{9\pi}{7}) > 0$

۳ انتهای کمان $-\frac{8\pi}{5}$ در ناحیه اول است. بنابراین: $\sin(-\frac{8\pi}{5}) > 0 \rightarrow -\sin(-\frac{8\pi}{5}) < 0$

۴ انتهای کمان $-\frac{\pi}{7}$ در ناحیه چهارم است. بنابراین: $\cos(-\frac{\pi}{7}) > 0$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

با توجه به نمودار، $f(\cdot) = 1$ و $f(\frac{\Delta\pi}{3}) = 0$ است.

$$\left. \begin{array}{l} f(\cdot) = 1 \rightarrow a + b = 1 \\ f(\frac{\Delta\pi}{3}) = 0 \rightarrow \frac{a}{3} + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = 2 \cos x - 1 \Rightarrow f(\frac{7\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

$$y = 1 + 2 \sin 7x \Rightarrow \min y = 1 - 2 = -1$$

$$y = \sqrt{2} - \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \min y = \sqrt{2} - 1$$

$$y = -\pi \sin \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow \min y = -2 - \pi$$

$$y = -\frac{3}{4} \cos 3x \Rightarrow \min y = -\frac{3}{4}$$

کوچک‌ترین مقدار به دست آمده برای مینیمم در توابع فوق، برابر $(-2 - \pi)$ است، زیرا $\pi \approx 3.14$ و بنابراین $-2 - \pi \approx -5.14$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

k	۰	۱
x	$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ جواب است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷

می‌دانیم در توابع مثلثاتی به شکل کلی $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ یا $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و مینیمم تابع برابر $-|a| + d$ و

و ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ است. پس اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم، خواهیم داشت:

بررسی گزینه‌ها:

$$y = -2 - 7 \sin \frac{x}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{\lambda}} = 16\pi \quad \min = -2 - 7 = -9 \quad \max = -2 + 7 = 5 \quad \times$$

$$y = -2 - 7 \cos \lambda x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \quad \min = -2 - 7 = -9 \quad \max = -2 + 7 = 5 \quad \checkmark$$

$$y = 2 - 7 \sin \lambda x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \quad \min = 2 - 7 = -5 \quad \max = 2 + 7 = 9 \quad \times$$

$$y = 2 - 7 \cos \frac{x}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{\lambda}} = 16\pi \quad \min = 2 - 7 = -5 \quad \max = 2 + 7 = 9 \quad \times$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸

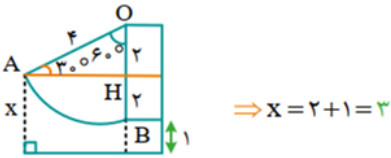
دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{8}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹

در مثلث OAH مقدار OH برابر ۲ می‌شود، پس:



$$\Rightarrow x = 2 + 1 = 3$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{3} \sin a - \frac{1}{4} \cos^2 a = 0 \Rightarrow 9 \sin^2 a - 24 \sin a + 7 = 0 \Rightarrow \sin a = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{8}{9}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \quad \frac{\max - \min}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \max - \min = \pi$$

در تابع $y = \frac{\pi}{2} \sin 2x + 1$ داریم:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{2}) + c = a \cos bx + c$$

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow b = 4 \text{ (علامت b اهمیتی ندارد)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c = 3 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

تابع در $x = 0$ دارای مینیمم نسبی است. بنابراین $a < 0$ است.

$$f(x) = -2 \cos 4x + 1 \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = -2 \cos \frac{2\pi}{3} + 1 = 1 + 1 = 2$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha \Rightarrow \cos 2\beta = \cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) \times (-\frac{1}{2}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳

نکته: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۱۴

راه حل اول:

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - (1 - \sin x) = 1 - 1 + \sin x = \sin x$$

راه حل دوم:

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{(1 + \sin x) - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{(1 - \cos^2 x) + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \sin x$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵

نکته (اتحاد مربع دوجمله‌ای): $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ برای هر زاویه دلخواه α داریم: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = b + a + 2\sqrt{ab} + a + b - 2\sqrt{ab} = 2a + 2b = 1$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

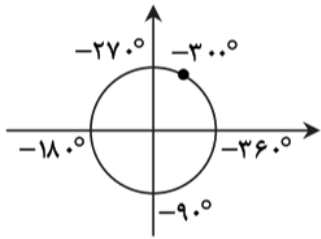
۱۶

نکته: هر π رادیان برابر 180° درجه است.

با توجه به نکته بالا، ابتدا زاویه مورد نظر را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$-\frac{5\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -300^\circ$$

با توجه به دایره مثلثاتی، این زاویه در ربع اول دایره مثلثاتی قرار دارد.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۷

نکته: در دایره‌ای به شعاع r ، طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی α (برحسب رادیان) برابر است با:

$$\ell = r\alpha$$

نکته: اگر D اندازه α برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

ابتدا اندازه زاویه را برحسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{5}$$

پس زاویه موردنظر برابر $\alpha = \frac{\pi}{5}$ رادیان است. چون قطر برابر ۱۰ است، شعاع برابر ۵ است. بنابراین طول کمان موردنظر برابر است با:

$$\ell = r\alpha = 5 \times \frac{\pi}{5} = \pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۸

نکته: رابطه بین اندازه زاویه، طول کمان و شعاع دایره به صورت زیر است:

$$\frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \text{اندازه یک زاویه برحسب رادیان}$$

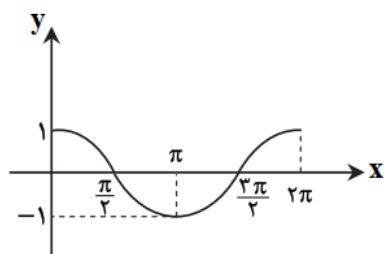
نکته: اگر بخواهیم اندازه زاویه α که برحسب رادیان بیان شده را برحسب درجه بیان کنیم، کافی است آن را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب کنیم.

طبق رابطه بین زاویه، طول کمان و شعاع دایره داریم:

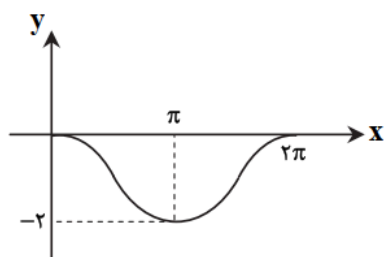
$$\text{زاویه } \alpha \text{ برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{\pi}{4}$$

اکنون برای به دست آوردن این زاویه برحسب درجه کافی است $\frac{\pi}{4}$ را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب کنیم: $\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

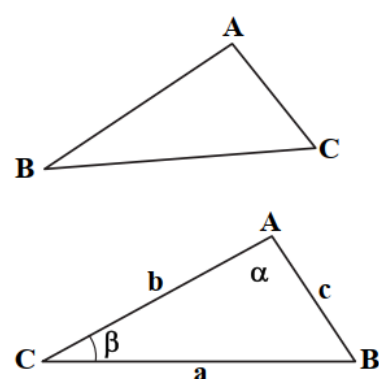


نکته: با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ یا $y = f(x) - a$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به بالا (پایین) انتقال دهیم.
نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت روبه‌رو است:



اکنون برای رسم $f(x) = \cos x - 1$ کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. پس نمودار آن به صورت روبه‌رو است:
بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویه

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

بین آن دو ضلع:

مساحت مثلث ABC را در دو حالت به دست می‌آوریم و داریم:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \\ S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \beta \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{b} \cdot c \cdot \sin \alpha = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \sin \beta \Rightarrow c \sin \alpha = a \sin \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \xrightarrow{\sin \alpha = 2 \sin \beta} \frac{c}{a} = \frac{\sin \beta}{2 \sin \beta} = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\text{نکته: } \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \end{cases}$$

ابتدا با توجه به شکل، داریم:

$$PN^2 = MP^2 + MN^2 \Rightarrow x^2 = MP^2 + \frac{1}{9}x^2 \Rightarrow MP^2 = \frac{8}{9}x^2 \Rightarrow MP = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$$

اکنون داریم:

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{\frac{1}{3}x}{x} = -\frac{1}{3}$$

$$\tan(\pi + \beta) = \tan \beta = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}x}{\frac{1}{3}x} = 2\sqrt{2}$$

$$-\frac{1}{3} + \sqrt{2}(2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$$

پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: توابع $y = a\cos bx + c$ و $y = a\sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $c + |a|$ ، مقدار مینیمم $c - |a|$ و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

$$f(x) = 1 - 3\cos(2\pi x) = -3\cos(2\pi x) + 1 \Rightarrow a = -3, b = 2\pi, c = 1$$

$$\begin{cases} \max = 1 + |-3| = 4 \\ \min = 1 - |-3| = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل ضرب ماکزیمم و مینیمم} = -8$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

پس حاصل ضرب ماکزیمم و مینیمم تابع -8 برابر دوره تناوب تابع است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: توابع $y = a\cos bx + c$ و $y = a\sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $c + |a|$ ، مقدار مینیمم $c - |a|$ و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

$$\min = -1 \Rightarrow -c - 2 = -1 \Rightarrow c = -1$$

با توجه به شکل داریم:

$$\frac{T}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$$

$$-1 \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

بنابراین حاصل خواسته شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x \pm T) = f(x)$ و $x \pm T \in D_f$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

از آنجا که $f(x \pm T) = f(x)$ ، می‌توان نتیجه گرفت اگر n عددی صحیح باشد، $f(x \pm nT) = f(x)$ است.

$$f(34) = f(2 + 8 \times 4) = f(2 + 8T) = f(2) = 2$$

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر ۴ است، بنابراین می‌توان نوشت:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۵

$$\text{نکته: } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

با توجه به نکته بالا، مقدار $\sin^2 \alpha$ را به دست می آوریم، پس داریم:

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin^4 \alpha = \frac{1}{25} = 0.04$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶

نکته: جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است که $k \in \mathbb{Z}$.

باید صورت کسر برابر صفر و مخرج آن مخالف صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{x \in (0, 6\pi)} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$$

$$1 + \sin^3 x \neq 0 \Rightarrow \sin^3 x \neq -1 \Rightarrow \sin x \neq -1$$

به ازای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{2}$ و $\frac{11\pi}{2}$ مقدار $\sin x = -1$ است و مخرج کسر صفر می شود؛ پس این سه عدد جواب های معادله نیستند.

$$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

اکنون جمع جواب های معادله را به دست می آوریم:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۷

نکته: توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx$ برابر 4π است. بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع عدد b و $b > 0$ است، بنابراین $b = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

از طرفی تابع f در همسایگی راست مبدأ نزولی است، پس $a \cdot b < 0$ و چون $b > 0$ ، در نتیجه $a < 0$ است. اکنون داریم:

$$\max = |a| + c = b \xrightarrow{c=0} |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a<0} a = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$a - b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸

راه حل اول:

$$\text{نکته: } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

با توجه به نکته بالا، عبارت را فقط بر حسب $\tan \alpha$ می نویسیم:

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 - \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{1 + \tan \alpha}{\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha}} + \frac{1 - \tan \alpha}{\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha}} = \tan \alpha - \tan \alpha = 0$$

راه حل دوم:

مخرج مشترک می گیریم و عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{(1 + \tan \alpha)(1 - \cot \alpha) + (1 - \tan \alpha)(1 + \cot \alpha)}{(1 + \cot \alpha)(1 - \cot \alpha)} = \frac{1 + \tan \alpha - \cot \alpha - 1 + 1 - \tan \alpha + \cot \alpha - 1}{1 - \cot^2 \alpha} = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

$$\text{نکته: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

با توجه به نکات، داریم:

$$\sin 70^\circ + \sin 110^\circ + 2 \cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) + \sin(90^\circ + 20^\circ) + 2 \cos 20^\circ = \cos 20^\circ + \cos 20^\circ + 2 \cos 20^\circ = 4 \cos 20^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۰

$$\text{نکته: } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

نکته: جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

با توجه به نکات بالا، معادله را حل می کنیم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \\ 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = 0, 2\pi \end{cases}$$

بنابراین معادله ۴ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۱

$$\text{نکته: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \text{ و } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

از آنجا که $\frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} = \pi$ و $\frac{\pi}{5} + \frac{5\pi}{14} = \frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$ می توان نوشت:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{5\pi}{14} - 2 \sin \frac{6\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} - 2 \sin \frac{\pi}{5} = 0$$

بنابراین داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ هستند که $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\pi + 3x) \Rightarrow \cos x = \cos 3x$$
 ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$
 اکنون داریم:

k	0	1	2	3	4
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi = 5\pi$
 حال جواب‌های معادله را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$\theta = 5\pi \Rightarrow \tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$
 پس خواسته سؤال برابر است با:

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = k\pi \text{ مجموعه جواب } x = k\pi, \text{ زیر مجموعه‌ای از مجموعه جواب } x = \frac{k\pi}{2} \text{ است و جواب معادله } x = \frac{k\pi}{2} \text{ است:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

مقادیر max و min تابع f به ترتیب ۴ و -۲ هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} \max = a + |b| = 4 \\ \min = a - |b| = -2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \pm 3$$

با توجه به نمودار تابع $f(x) = -b \cos(cx) + a$ ، مشخص است که $-b > 0$ و در نتیجه $b < 0$. پس $b = -3$ است.

از طرفی دوره تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{c}$ است، بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 8 \Rightarrow c = \pm 8$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$a = 1, b = -3, c = \pm 8 \Rightarrow b + \frac{c^2}{a} = -3 + 64 = 61$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ هستند که $k \in \mathbb{Z}$. معادله مورد نظر را حل می‌کنیم.

$$(\cos x + \sqrt{2})(2 \sin x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x = -\sqrt{2} \\ 2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
 غرق

معادله اول جواب ندارد؛ زیرا همواره $-1 \leq \cos x \leq 1$ اما $-\sqrt{2} < -1$ ، جواب‌های معادله دوم به صورت زیر است:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۵

نکته: جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که:

$$k \in \mathbb{Z}$$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که:

$$k \in \mathbb{Z}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$1) \cos 4x = \cos 3x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \end{cases} \xrightarrow{k=1} \begin{cases} x = 2\pi \\ x = \frac{2\pi}{7} \end{cases}$$

پس $x = \frac{2\pi}{7}$ ، کوچک‌ترین جواب مثبت معادله است و در نتیجه:

$$\alpha = \frac{2\pi}{7}$$

$$2) \sin 3x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{5} \end{cases} \xrightarrow{k=-1} \begin{cases} x = -2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

پس $x = -\frac{\pi}{5}$ بزرگ‌ترین جواب منفی معادله است و در نتیجه $\beta = -\frac{\pi}{5}$. پس خواسته سؤال برابر است با:

$$2\alpha - 3\beta = \frac{4\pi}{7} + \frac{3\pi}{5} = \frac{41\pi}{35}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۶

نکته: اندازه زاویه مرکزی بر حسب رادیان برابر است با طول کمان روبه‌روی آن زاویه تقسیم بر شعاع دایره.

طبق نکته، اندازه زاویه α بر حسب رادیان برابر است با:

$$\alpha = \frac{8\pi}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

اکنون در مثلث OAB نیمساز را رسم می‌کنیم. از آنجایی که این مثلث متساوی‌الساقین است ($OA = OB$) نیمساز O ، ارتفاع و میانه وارد

بر AB نیز هست. در مثلث OAH ، زاویه $\hat{O}_1$ ، برابر نصف زاویه α یعنی $\frac{\pi}{3}$ است.

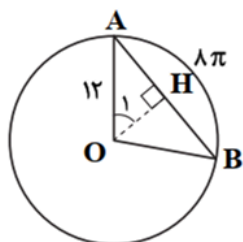
داریم:

$$\sin \hat{O}_1 = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{12} \Rightarrow AH = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = 6\sqrt{3}$$

بنابراین طول وتر AB برابر است با:

$$AB = 2AH = 2 \times 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



نکته: $\sin(k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $\tan(k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$)

نکته: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

نکته: $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$

ابتدا مقدار a را به دست می آوریم:

$$\sin(43^\circ) = \sin(36^\circ + 9^\circ - 2^\circ) = \sin(9^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

$$\cos(\frac{10\pi}{9}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{9}) = -\cos \frac{\pi}{9} = -\cos 2^\circ$$

$$\tan(\frac{22\pi}{4}) = \tan(6\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$$

حال داریم:

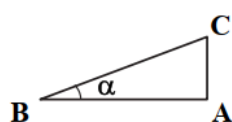
$$a = \frac{3 \cos 2^\circ}{-\cos 2^\circ} + 1 \Rightarrow a = -2$$

اکنون خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$a = -2 \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{a}) - \sin(x + a\pi) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(x - 2\pi) = -\sin x - \sin x = -2 \sin x$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: در مثلث قائم الزاویه $\hat{A} = 90^\circ$ ABC داریم:



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

در مثلث قائم الزاویه ABH داریم:

$$\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 3BH$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow (3BH)^2 = BH^2 + 2^2 \Rightarrow 8BH^2 = 4 \Rightarrow BH^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

همچنین در مثلث قائم الزاویه ACH داریم:

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow (\sqrt{6})^2 = 2^2 + CH^2 \Rightarrow CH^2 = 6 - 4 = 2 \Rightarrow CH = \sqrt{2}$$

بنابراین اندازه ضلع BC برابر است با:

$$BC = BH + CH = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{1 + 2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\text{نکته: } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

۳۹

α زاویه‌ای حاده است، پس $\cos \alpha$ مقداری مثبت است.

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{9} \Rightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \alpha = \frac{2}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3} \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

مختصات نقطه A به صورت $A(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$ و مختصات نقطه B به صورت $B(\cos 210^\circ, \sin 210^\circ)$ است؛ پس:

۴۰

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

در هر یک از نسبت‌های مثلثاتی، زاویه‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

۴۱

$$\frac{\sin(-13^\circ)\cos(79^\circ)}{\cos(-68^\circ)\sin(-29^\circ)} = \frac{-\sin(13^\circ)\cos(79^\circ)}{\cos(68^\circ) \times -\sin(29^\circ)}$$

$$= \frac{\sin(18^\circ - 5^\circ)\cos(2 \times 36^\circ + 7^\circ)}{\cos(2 \times 36^\circ - 4^\circ) \times \sin(36^\circ - 7^\circ)} = \frac{\cancel{\sin 5^\circ} \times \cos 7^\circ}{\cancel{\cos 4^\circ} \times -\sin 7^\circ} = -\cot 7^\circ = -\frac{1}{\tan 7^\circ} = -\frac{1}{a}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0$$

با استفاده از رابطه $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ داریم:

۴۲

$$\Rightarrow 2\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

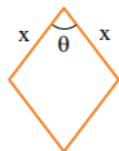
$$\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

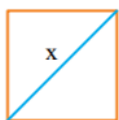
۴۳



$$S = xx \sin \theta$$

گام اول: مساحت لوزی به ضلع X برابر است با:

پاسخ تشریحی



$$S = \frac{x^2}{2}$$

مساحت مربع به قطر X برابر است با:

$$\frac{1}{2} x^2 = x^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

گام دوم: طبق صورت سؤال، مساحت‌ها برابرند، پس:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: حداقل مقدار تابع $f(x) = -2a + 3 \cos x$ برابر با $\text{Min}(f) = -2a - 3$ و حداکثر مقدار تابع $g(x) = 3a - 2 \sin x$

پاسخ تشریحی

۴۴

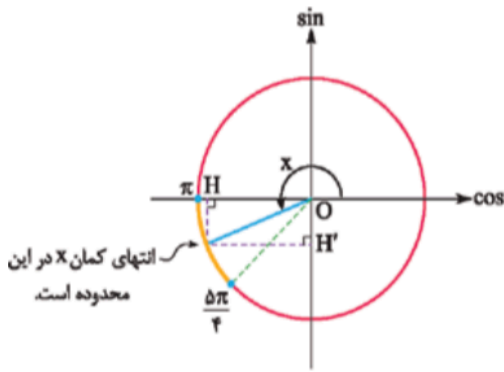
برابر با $\text{Max}(g) = 3a + 2$ است.

$$-2a - 3 = 3a + 2 - 10 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1$$

گام دوم: طبق صورت سؤال $\text{Min}(f) = \text{Max}(g) - 10$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا کمان x را بر روی دایره مثلثاتی نشان می‌دهیم. توجه کنید که در ناحیه سوم $\sin x < 0$ و $\cos x < 0$ است. در ادامه هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.



$$OH > OH' \Rightarrow \overbrace{-OH}^{\cos x} < \overbrace{-OH'}^{\sin x} \Rightarrow \cos x < \sin x$$

گام دوم: مطابق شکل داریم:

در نتیجه ۱ درست است.

$$-1 < \sin x < 0 \xrightarrow{\times \sin x, \sin x < 0} -\sin x > \sin^2 x$$

گام سوم: چون $\sin x < 0$ و $\cos x < 0$ است، پس:

$$-1 < \cos x < 0 \xrightarrow{\times \cos x, \cos x < 0} -\cos x > \cos^2 x$$

$$\text{جمع: } -(\sin x + \cos x) > \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1$$

$$\Rightarrow -(\sin x + \cos x) > 1 \xrightarrow{\times (-1)} \sin x + \cos x < -1$$

در نتیجه ۲ هم درست است.

گام چهارم: طبق گام دوم داریم:

$$\left. \begin{aligned} \cos x < \sin x &\xrightarrow{\div \cos x, \cos x < 0} \frac{\cos x}{\cos x} > \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x < 1 \\ \cos x < \sin x &\xrightarrow{\div \sin x, \sin x < 0} \frac{\cos x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x} \Rightarrow 1 < \cot x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan x < \cot x$$

بنابراین ۳ هم درست است.

$$0 < \tan x < \cot x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \tan^2 x < \cot^2 x$$

گام پنجم:

پس ۴ نادرست است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180^\circ} \times 225 = \frac{5\pi}{4} \text{ رادیان}$$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا زاویه دوران را برحسب رادیان به دست می‌آوریم.

گام دوم: از رابطه $L = R\theta$ طول کمان یا همان مسافت طی شده را به دست می‌آوریم. توجه کنید که متر ۲۴ $R = \frac{48}{\pi}$ است.

$$L = 24 \times \frac{5\pi}{4} = 30\pi \xrightarrow{\pi \approx 3/14} L \approx 30 \times 3/14 = 94/2$$

در بین گزینه‌ها نزدیک‌ترین جواب ۹۴ است؛ پس ۲ را انتخاب می‌کنیم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۷

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا مقدار هر یک از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sin \frac{4\pi}{3} &= \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{11\pi}{6} &= \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{7\pi}{6} &= \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \tan \frac{5\pi}{6} &= \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

گام دوم: مقادیر به دست آمده از گام اول را در تساوی صورت سؤال قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\frac{a(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + b(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{a(-\frac{1}{2}) + b(\frac{1}{2})} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(b-a)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}(a+b)}{b-a} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a+b}{b-a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a+3b=b-a \Rightarrow 4a=-2b \Rightarrow \frac{b}{a} = -2\end{aligned}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۸

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به این که دو زاویه 15° و 75° متمم هم هستند. از نکته (۱) استفاده می‌کنیم و عبارت B را برحسب کمان

$$B = \tan^2 75^\circ + \cot^2 75^\circ \xrightarrow[\cot 75^\circ = \tan 15^\circ]{\tan 75^\circ = \cot 15^\circ} B = \cot^2 15^\circ + \tan^2 15^\circ \quad (1)$$

۱۵° می‌نویسیم:

گام دوم: حالا می‌خواهیم از نکته (۲) استفاده کنیم تا عبارت B هم مانند عبارت A برحسب sin و cos شود، پس به سمت راست تساوی (۱) دوتا عدد یک اضافه و کم می‌کنیم تا جملات اتحاد مثلثاتی ظاهر شوند:

$$B = \underbrace{1 + \cot^2 15^\circ}_{\substack{\text{نکته (۲):} \\ \sin^2 15^\circ}} + \underbrace{1 + \tan^2 15^\circ}_{\cos^2 15^\circ} - 2 \Rightarrow B = \frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} - 2$$

$$A - B = \frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} - \left(\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} - 2 \right) = 2 \quad \text{گام سوم: خواسته سؤال، یعنی } A - B \text{ را حساب می‌کنیم:}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۹

پاسخ تشریحی

گام اول: تابع f, g را تشکیل می‌دهیم.

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{تعریف}}{=} g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad f(x) = \sin 3x \quad \sin(3x) \times \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin 3x \times \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

گام دوم: مقدار $x = \frac{\pi}{36}$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$(f \cdot g)\left(\frac{\pi}{36}\right) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{36}\right) \times \sin\left(3 \times \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \times \left(+\cos \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \times \cos \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

ربع دوم: $\sin > 0$ ↗ ↘ تغییر نسبت

گام سوم: صورت و مخرج عبارت (۱) را در ۲ ضرب می‌کنیم و از اتحاد مثلثاتی $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$(f \cdot g)\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۰

پاسخ تشریحی

گام اول: رابطه $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ را برای مساحت مثلث می‌نویسیم.

$$2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

گام دوم: حالا به راحتی می‌توان خواسته سؤال را به دست آورد:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۱

پاسخ تشریحی

گام اول: معادله را ساده می‌کنیم.

$$\frac{a - 3 \cos x}{2 + \cos x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a - 12 \cos x = 2 + \cos x \Rightarrow 13 \cos x = 4a - 2 \Rightarrow \cos x = \frac{4a - 2}{13} \quad (*)$$

گام دوم: برای آن که معادله (*) جواب داشته باشد باید $-1 \leq \cos x \leq 1$ باشد، پس:

$$-1 \leq \frac{4a - 2}{13} \leq 1 \xrightarrow{\times 13} -13 \leq 4a - 2 \leq 13 \xrightarrow{+2} -11 \leq 4a \leq 15 \xrightarrow{\div 4} -\frac{11}{4} \leq a \leq \frac{15}{4}$$

پس کم‌ترین مقدار a برابر با $-\frac{11}{4}$ یا -2.75 است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۲

پاسخ تشریحی

گام اول: اگر عبارت خواسته شده را معکوس کنیم، می‌توانیم آن را برحسب $\tan x$ و $\cot x$ بنویسیم؛ پس با فرض

$$A = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad \text{داریم:}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{1}{A} = \tan^2 x + \cot^2 x \quad (1)$$

گام دوم: طرفین تساوی $\tan x - \cot x = 6$ را به توان ۲ می‌رسانیم تا $\tan^2 x + \cot^2 x$ ساخته شود.

$$(\tan x - \cot x)^2 = 6^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x - \underbrace{2 \tan x \cot x}_1 = 36 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 38 \quad (2)$$

گام سوم: با جای‌گذاری (۲) در (۱) داریم:

$$\frac{1}{A} = 38 \Rightarrow A = \frac{1}{38}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ، معادله مثلثاتی داده شده را صرفاً بر حسب سینوس می نویسیم.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 - 3\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \quad (1)$$

گام دوم: با استفاده از تغییر متغیر $t = \sin x$ ، معادله (۱) به معادله درجه دوم زیر تبدیل می شود.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به دست آمده برای $\sin x$ و در نظر گرفتن این که $-\pi < x < 2\pi$ است، مقادیر قابل قبول برای x را به دست می آوریم.

$$\sin x = 1 \xrightarrow{-\pi < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{-\pi < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

گام چهارم: پس $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\beta = \frac{5\pi}{6}$ است و $\frac{\beta}{\alpha} = 5$ می شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۴

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا در مثلث قائم الزاویه ABD داریم:



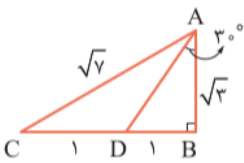
$$\tan(\hat{BAD}) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{1}{AB} \xrightarrow{\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{AB} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} \times BC}{2} \Rightarrow BC = 2$$

گام دوم: مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ است؛ پس:

$$BC = 2 \Rightarrow CD + BD = 2 \xrightarrow{BD=1} CD = 1$$

از طرفی:



گام سوم: اندازه های به دست آمده را در شکل قرار می دهیم:

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \underbrace{3+4}_5 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$$

$$\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

گام چهارم: برای به دست آوردن $\sin(2\hat{C})$ کافی است $\sin(\hat{C})$ و $\cos(\hat{C})$ را پیدا کنیم:

$$\cos(\hat{C}) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

گام پنجم: حالا با استفاده از نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان، جواب به دست می آید:

$$\sin(2\hat{C}) = 2\sin(\hat{C}) \cdot \cos(\hat{C}) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۵

پاسخ تشریحی

گام اول: اول در ضابطه تابع به جای $\sin ax \cdot \cos ax$ قرار می دهیم $\frac{\sin 2ax}{2}$ ، پس $f(x) = a + \frac{b}{2} \sin 2ax$ می شود.

گام دوم: با توجه به نمودار تابع، $f(0) > 0$ است؛ پس:

$$f(0) = a + \frac{b}{2} \sin 0 = a > 0$$

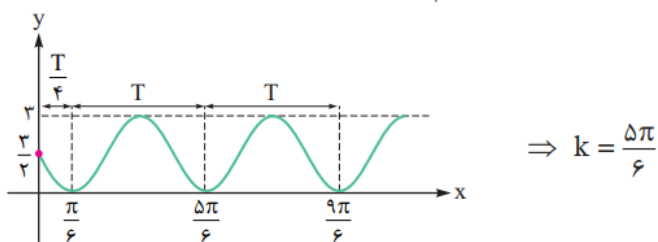
گام سوم: از طرفی نمودار تابع در محل برخورد با محور y ها نزولی است؛ پس $\frac{b}{2} \times 2a < 0$ می شود:

$$\frac{b}{2} \times 2a < 0 \Rightarrow ab < 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$

گام چهارم: حداکثر و حداقل مقدار تابع برابر ۳ و صفر است؛ پس:

$$\begin{aligned} \max : a + \left| \frac{b}{2} \right| &= 3 \\ \min : a - \left| \frac{b}{2} \right| &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\left| \frac{b}{2} \right| = -\frac{b}{2}} \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 3 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -3 \end{cases}$$

گام پنجم: بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin(2x)$ می شود. دوره تناوب این تابع برابر $\frac{2\pi}{2}$ است، پس نمودار تابع به شکل زیر می شود:



$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin(2x)$$

گام ششم: در آخر داریم:

$$\Rightarrow f(2k) = f\left(2 \times \frac{\Delta\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\Delta\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin\left(\cancel{2} \times \frac{\Delta\pi}{\cancel{3}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \overbrace{\sin(\Delta\pi)}^{\text{صفر}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$2 \sin x = 3 \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{2}$$

گام اول: از رابطه داده شده، مقدار $\tan x$ را پیدا می کنیم:

$$\left[\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = [-\tan x] = \left[-\frac{3}{2}\right] = -1.5$$

از گام اول

گام دوم: مقدار خواسته شده برابر می شود با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۶

پاسخ تشریحی

۵۷

پاسخ تشریحی

گام اول: چون اختلاف دو ریشه متوالی خواسته شده، معادله را در بازه $[0, 2\pi]$ حل می‌کنیم؛ داریم:

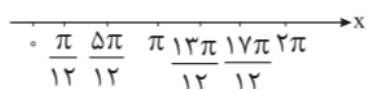
$$4 \sin^2 x - \tan x = 0 \Rightarrow 4 \sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{4 \sin^2 x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} \sin x (4 \sin x \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \\ 2) 4 \sin x \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

گام دوم: برای معادله (۲) داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$



گام سوم: جواب‌های به‌دست‌آمده برای x را روی محور نمایش می‌دهیم:

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{12}, \frac{4\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$$

اختلاف ریشه‌های متوالی را به دست می‌آوریم:

بنابراین، اختلاف ریشه‌های متوالی نمی‌تواند برابر با $\frac{5\pi}{12}$ باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۸

پاسخ تشریحی

گام اول: در طرفین عبارت داده‌شده، به جای x مقدار $x + 2/6$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x + 2/6) = -f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+2/6} f((x + 2/6) + 2/6) = -f(x + 2/6)$$

$$\Rightarrow f(x + 5/6) = -f(x + 2/6)$$

$$f(x + 5/6) = -(-f(x)) = f(x)$$

گام دوم: حالا در عبارت داده‌شده، از تساوی $f(x + 2/6) = -f(x)$ استفاده می‌کنیم:

پس تابع f ، متناوب با دوره تناوب $T = 5/6$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۹

پاسخ تشریحی

گام اول: در معادله داده‌شده، از اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 x + \frac{2}{3} \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - \cos^2 x + \frac{2}{3} \cos x = 1 + \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x - \frac{2}{3} \cos x + \frac{1}{9} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - \frac{1}{3})^2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$$

گام دوم: x زاویه‌ای حاده است. با توجه به این، مقدار $\sin x$ را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2}} \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

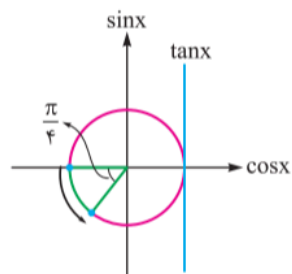
$$\cos^2 x + \sqrt{2} \sin x = \frac{1}{9} + \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$$

گام سوم: حالا مقدار عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۰

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به محدوده α ، محدوده تغییرات 2α را به دست می آوریم:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \pi < 2\alpha \leq \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

از دایره مثلثاتی، مشخص است که به ازای بازه‌ای که 2α در آن قرار دارد، مقدار $\tan x$ در بازه $(0, 1]$ قرار می گیرد.

$$0 < \tan 2\alpha = \frac{1}{m-1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{m-1} \leq 1$$

گام دوم: حالا حدود m را می توانیم به دست بیاوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m-1} > 0 \Rightarrow m > 1 \\ \frac{1}{m-1} \leq 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{طرفین نامعادله را معکوس می کنیم.}]{m > 1} m-1 \geq 1 \Rightarrow m \geq 2$$

اشتراک می گیریم. $m \geq 2$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۱

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار، $f(0) = -1$ است؛ پس خواهیم داشت: $f(0) = a = -1 \Rightarrow f(x) = -1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)$ گام دوم: شروع نمودار در $x > 0$ ، به صورت نزولی است؛ پس $2a \times \frac{\pi}{b} < 0$ خواهد بود. از آن جایی که مقدار a منفی است، $b > 0$ می شود.گام سوم: مقادیر $\max$ و $\min$ تابع را به دست می آوریم. اختلاف این دو مقدار، ارتفاع مثلث ABC را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} \max &= -1 - 2(-1) = -1 + 2 = 1 \\ \min &= -1 - 2(1) = -3 \end{aligned} \Rightarrow \text{ارتفاع مثلث} = \max - \min = 4$$

گام چهارم: از طرفی قاعده مثلث ABC ، یعنی AC برابر با یک دوره تناوب نمودار $f(x)$ است، یعنی: $AC = T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{b}|} = 2b$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2b = 24 \Rightarrow b = 6$$

گام پنجم: برای مساحت مثلث ABC داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۲

اگر P را ساده کنیم، داریم:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \Rightarrow P = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{P+1}{P-1} = \frac{\frac{7}{4}+1}{\frac{7}{4}-1} = \frac{11}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۳

نکته: $\tan x \cdot \cot x = 1$

$$\tan x \cot x = 1 \Rightarrow \frac{a^2 - 1}{a} \times \frac{2a}{1-a} = 1 \Rightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a)}{a(1-a)} = 1 \xrightarrow{a \neq 0, 1} -2(a+1) = 1 \Rightarrow a+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

نکته: در تابع خطی به فرم $y = mx + n$ ، m شیب خط است و داریم $m = \tan \alpha$ که α زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها است.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{نکته:}$$

$$-2m = 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2x - \frac{3}{2}y = 3 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{2}{3} = +\frac{4}{3} \quad \text{نقطه } (0, -2) \text{ متعلق به خط است، پس:}$$

$$\Rightarrow \tan(\pi - \alpha) = \frac{4}{3} \Rightarrow -\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ غقیق } (90^\circ < \alpha < 180^\circ) \\ \cos \alpha = -\frac{3}{5} \quad \checkmark \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۴

نکته: طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی α (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع r برابر است با: $\ell = r\alpha$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \quad \text{نکته: اگر } D \text{ اندازه یک زاویه برحسب درجه و } R \text{ اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه:}$$

ابتدا اندازه زاویه 108° را برحسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\frac{108^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{108}{180} \pi = \frac{3\pi}{5}$$

طول دو کمان با هم برابر است، پس داریم:

$$\ell_A = \ell_B \Rightarrow \alpha_A r_A = \alpha_B r_B \Rightarrow \frac{3\pi}{5} \times r_A = \frac{9\pi}{10} \times r_B \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{\frac{9\pi}{10}}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\pi r_A^2}{\pi r_B^2} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

پس نسبت مساحت دایره A به B برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۵

$$\text{نکته: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$A = 1 - \frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} = 1 - \frac{1 - \cos^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} = 1 - \frac{(1 - \cos 15^\circ)(1 + \cos 15^\circ)}{1 + \cos 15^\circ} = 1 - (1 - \cos 15^\circ) = 1 - 1 + \cos 15^\circ \Rightarrow A = \cos 15^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۶

$$\sin \theta = y \text{ و } \cos \theta = x$$

نکته: اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی متناظر زاویه θ باشد، آنگاه:

از آنجا که $\sin \theta > \cos \theta$ ، پس $y > x$ ؛ همچنین با توجه به اینکه $|\sin \theta| < |\cos \theta|$ ، پس $|y| < |x|$ و داریم:

$$|y| < |x| \Rightarrow y^2 < x^2 \Rightarrow y^2 - x^2 < 0 \Rightarrow (y+x)(y-x) < 0 \xrightarrow{y > x} y+x < 0 \Rightarrow y < -x$$

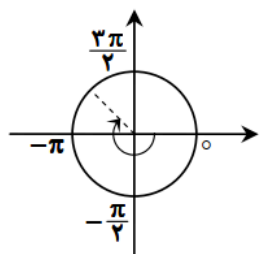
بنابراین $x < y < -x$ که در گزینه ۲ به درستی ترسیم شده است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۷

ابتدا داریم:

$$-\frac{6\pi}{\Delta} = -\left(\pi + \frac{\pi}{\Delta}\right) = -\pi - \frac{\pi}{\Delta}$$



با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو، زاویه $-\frac{6\pi}{\Delta}$ در ربع دوم واقع است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$, $\cot(180^\circ + \alpha) = \cot \alpha$

با استفاده از نکته بالا، داریم:

$$\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot(240^\circ) = \cot(180^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

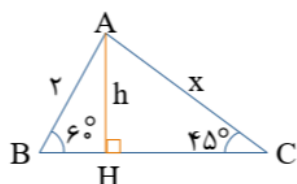
بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۸

روش اول:

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



$$\triangle ABH: \frac{h}{AB} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$\triangle ACH: \frac{h}{AC} = \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

روش دوم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = AC \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$

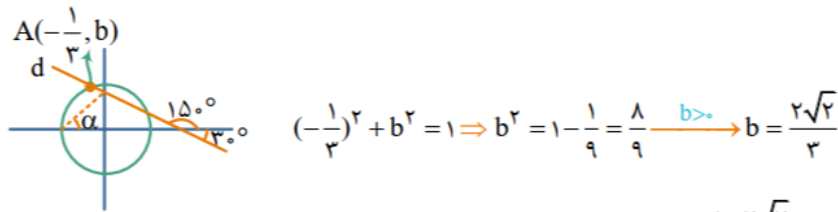
روش سوم:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نقطه A بر روی دایره مثلثاتی قرار دارد، بنابراین:

۷۰

شیب خط d برابر $\tan 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ بوده و از نقطه $A(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ عبور می‌کند. معادله خط d را می‌نویسیم.

$$d: y - \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{3}}{9}$$

 $\tan \alpha$ همان عرض از مبدأ خط d یعنی $\frac{6\sqrt{2} - \sqrt{3}}{9}$ است، زیرا ضلع مجاور به زاویه α در مثلث قائم‌الزاویه برابر شعاع دایره یعنی ۱ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۱

می‌دانیم:

$$f(124) = f(123+1) = f(3k+1) = f(1) = 3$$

همچنین:

$$f(3) = f(3+0) = f(0) = -1$$

از طرفی:

$$f(-1) = f(-3+2) = f(2) = 5$$

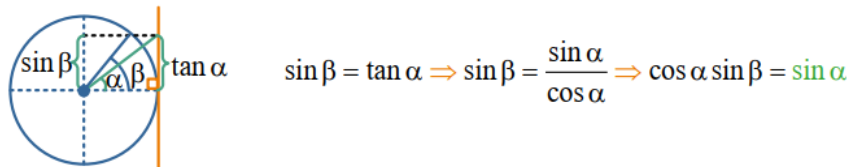
بنابراین:

$$f(f(f(124))) = f(f(3)) = f(-1) = 5$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۲

با توجه به شکل نتیجه می‌شود:

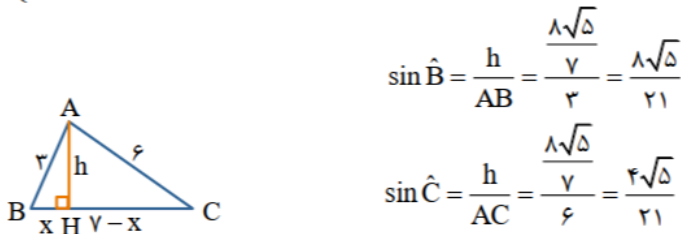


(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۳

از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH در شکل مقابل، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} h^2 = 9 - x^2 \\ h^2 = 36 - (7-x)^2 \end{cases} \Rightarrow 9 - x^2 = 36 - (7-x)^2 \Rightarrow x = \frac{11}{7} \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{5}}{7}$$



بنابراین:

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{AB} = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{7}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{21}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{h}{AC} = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{7}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{21}$$

$$\sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \frac{12\sqrt{5}}{21} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۴

کمترین مقدار تابع برابر ۴- است که به ازای $\sin x = -1$ به دست می‌آید: (چون $a > 0$)

$$-a + 2 - a = -4 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = 3 \sin x - 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{a}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۵

توجه کنید که $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ، بنابراین معادله موردنظر به صورت زیر است:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{5})) = \cos(2x - \frac{\pi}{10})$$

پس جواب‌های معادله به صورت زیر هستند: ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{5} = 2k\pi + 2x - \frac{\pi}{10} \\ \frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{5} = 2k\pi - 2x + \frac{\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2k\pi + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{5} + \frac{3\pi}{20} \\ 2k\pi = \frac{\pi}{5} \Rightarrow k = \frac{1}{10} \text{ غقیق} \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۶

نکته: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

نکته (اتحاد مزدوج): $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A = ((\sin x + \cos x) + 1)((\sin x + \cos x) - 1) = (\sin x + \cos x)^2 - 1^2$$

$$= (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\sin x \cos x) - 1$$

$$= 1 + 2\sin x \cos x - 1 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

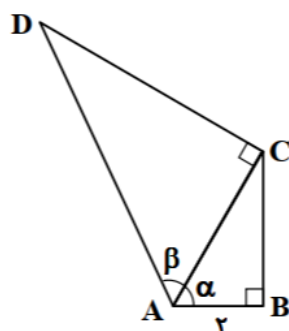
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۷

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}, \quad \tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$$

با توجه به شکل داده شده، داریم:



$$\Delta ABC: \tan \alpha = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 21 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$$\Delta ACD: \cos \beta = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{5}{AD} \Rightarrow AD = \frac{25}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۸

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = k \Rightarrow \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) = k$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + 1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = k$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

۷۹

$$(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)^2 = 25$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

۸۰

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin(3\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$$

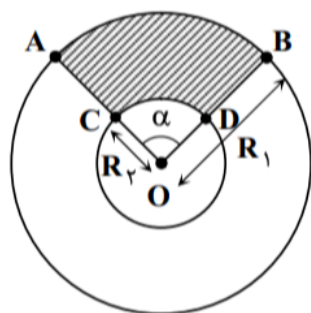
$$A = \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \xrightarrow{\div \cos x} A = \frac{-\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{-\tan x + 1}{1 + \tan x} \Rightarrow A = \frac{-\frac{4}{5} + 1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{5}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{1}{9}$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

فرض می کنیم R_1 شعاع دایره بزرگ تر و R_2 شعاع دایره کوچک تر باشد، بنابراین:

۸۱



$$\widehat{AB} = R_1 \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = 2R_1$$

$$\widehat{CD} = R_2 \alpha \Rightarrow \widehat{CD} = 2R_2$$

$$AC = BD = R_1 - R_2$$

بنابراین داریم:

$$\text{محیط قسمت هاشور خورده} = \widehat{AB} + \widehat{CD} + 2AC \Rightarrow 2R_1 + 2R_2 + 2(R_1 - R_2) = 8\pi \Rightarrow 4R_1 = 8\pi \Rightarrow R_1 = 2\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۲

مطابق نمودار تابع داده شده، ماکزیمم تابع برابر ۷ و مینیمم آن برابر ۳- است، پس:

$$\begin{cases} b + |a| = 7 \\ b - |a| = -3 \end{cases} \Rightarrow b = 2, |a| = 5 \Rightarrow a = \pm 5$$

با توجه به اینکه نمودار داده شده در محل تلاقی خود با محور عرض ها نزولی است و از طرفی ضریب x عدد مثبت ۲ است، پس ضریب سینوس یعنی a مقداری منفی است، پس:

$$a = -5$$

بنابراین:

$$ab = -10$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۳

ابتدا مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست می آوریم:

$$\min = -4 + 2a + 10 = 2a + 6$$

$$T = \frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{2a} \right|} \xrightarrow{a > 0} T = 4a$$

$$2a + 6 = 4a \Rightarrow a = 3$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۴

$$\text{نکته: } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ و } 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ابتدا خواسته مسئله را کمی ساده می کنیم:

$$\frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 x}}} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{|\sin x|}} = \frac{\cos x |\sin x|}{\sin x}$$

با توجه به محدوده $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ در ربع چهارم بوده و $\sin x$ مقداری منفی است، پس:

$$\frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{\cos x |\sin x|}{\sin x} = \frac{\cos x (-\sin x)}{\sin x} = -\cos x = -\frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۵

نکته: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف به صورت زیر است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

با توجه به نکات داریم:

$$(1 - \tan \alpha)(1 - \cot \alpha) > 0 \Rightarrow (1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}) > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} > 0$$

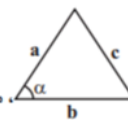
$$\Rightarrow \frac{-(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\cos \alpha \sin \alpha} > 0 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \Rightarrow \text{ناحیه دوم یا چهارم: } \sin \alpha \text{ و } \cos \alpha \text{ غیر هم‌علامتند.}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۶

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin \alpha \rightarrow 6 \sin \alpha = 5 \rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{25}{36} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

حل: در مثلث ، مساحت مثلث برابر $\frac{1}{2} a.b.\sin \alpha$ خواهد بود.

طبق رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ داریم

که فقط $+\frac{\sqrt{11}}{6}$ در گزینه‌ها داده شده است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸۷

کافی است تمام کمان‌ها را به فرم $(K\pi + \alpha)$ ، به صورتی که α کوچکترین اندازه را داشته باشد، بازنویسی کنیم. سپس با استفاده از روابط تبدیل کمان، مقدار عددی نسبت‌های مثلثاتی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi - \pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi + \pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\frac{22\pi}{3} = \frac{21\pi + \pi}{3} = 7\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

پس در حاصل عبارت خواسته شده داریم:

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{17\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸۸

نکته: $\sin(\pi + x) = -\sin x$

با جای‌گذاری $x = \frac{\Delta\pi}{6}$ در ضابطه تابع داده‌شده، داریم:

$$y = 3 - 2\sin\left(\frac{\Delta\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 3 - 2\sin \frac{7\pi}{6} = 3 - 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - 2(-\sin \frac{\pi}{6}) = 3 + 2\sin \frac{\pi}{6} = 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۹

عبارت P را به صورت زیر می نویسیم:

$$p = \frac{2(\cos x + 2) - 7}{\cos x + 2} = 3 - \frac{7}{\cos x + 2}$$

حال دقت کنید که:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \cos x + 2 \leq 3 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\cos x + 2} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow -7 \leq \frac{-7}{\cos x + 2} \leq \frac{-7}{3} \Rightarrow -4 \leq 3 - \frac{7}{\cos x + 2} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow P \in [-4, \frac{2}{3}]$$

پس: $P_{\min} = -4$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\text{نکته: } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

$$\text{نکته: } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

دو طرف تساوی $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ را به توان ۲ می رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{5}{9}$$

پس داریم:

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\left(-\frac{5}{9}\right)^2 = 1 - \frac{50}{81} = \frac{31}{81}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\text{نکته: } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

به حل معادله می پردازیم:

$$2\cos(3x) + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{\pi}{4}$$

حال با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\cos(3x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\text{نکته: } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

نکته: جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۹۳

نکته: جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos^3 x - 3\cos x - 4 = 0 \Rightarrow (\cos x + 1)(\cos x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 & \text{قق} \\ \cos x = 4 & \text{غقق} \end{cases} \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۹۴

با ساده‌سازی ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = \cos(ax + \frac{1}{y})\pi = \cos(a\pi x + \frac{\pi}{y}) = -\sin(a\pi x) \quad \min = b \Rightarrow -|-1| + 0 = b \Rightarrow b = -1$$

$$T = \frac{\lambda}{y} \quad \frac{y}{4}T = 2 \quad \text{می‌باشد پس}$$

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{\lambda}{y} \Rightarrow \frac{2}{|a|} = \frac{\lambda}{y} \Rightarrow |a| = \frac{y}{\lambda} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$a = +\frac{3}{4} \quad \text{می‌باشد، پس}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹۵

از روی شکل واضح است که اندازه قاعده مثلث یعنی پاره خط AC همان مقدار دوره تناوب تابع است که داریم:

برای یافتن ارتفاع مثلث نیز کافیت عرض نقطه B را حساب کنیم:

$$AC = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(0) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

نکته: دوره تناوب تابع $y = \tan(ax)$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹۶

محل برخورد دو نمودار همان ریشه معادله $25\cos(2x) - 4 = 3$ می‌باشد. از این تساوی به دست می‌آوریم: $\cos 2x = \frac{7}{25}$ چون $x = a$ یکی از ریشه‌های معادله می‌باشد لذا

$$\cos 2a = \frac{7}{25} \quad \text{از طرفی} \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{و} \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{لذا}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin a = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} = \frac{1 + \frac{7}{25}}{2} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{4}{5}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

چون $a \in (0, \pi)$ پس a در ناحیه اول قرار دارد و لذا $\sin a = \frac{3}{5}$ و $\cos a = \frac{4}{5}$.

بنابراین:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹۷

تست از ما خواسته ریشه‌های مشترک دو تابع را در بازه $[0, \pi]$ پیدا کنیم:

$$f(x) = 0 \rightarrow \tan 2x \cdot \tan 3x = -1 \rightarrow \tan 2x = -\frac{1}{\tan 3x}$$

$$\tan 2x = -\cot 3x \rightarrow \tan 2x = \tan(\frac{\pi}{2} + 3x)$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad g(x) = 0 \rightarrow \sqrt{2} \tan x (2\cos^2 x) - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2} \sin(2x) = 1 \rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

هر دو جواب‌های مشترک در دامنه تابع‌ها وجود دارند

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

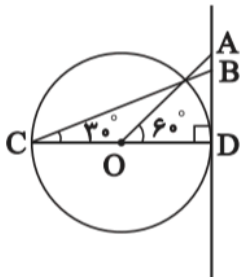
۹۸

طول پاره خط AD برابر $\sqrt{3}$ است. اندازه زاویه C برابر 30° است. در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{2} \rightarrow BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

طول پاره خط AB برابر است با:

$$AD - BD = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹۹

زاویه خط با جهت مثبت محور xها برابر 45° است. سپس:

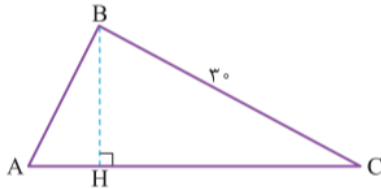
$$m = \tan 45^\circ = 1 \rightarrow f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$f(4) = 6$$

خط مماس از نقطه $(4, 6)$ عبور می‌کند. پس:
حال:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}}{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x + 4}} = \frac{f'(4)}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

**پاسخ تشریحی** گام اول: یک شکل برای مسئله رسم می‌کنیم:

چون نسبت‌های مثلثاتی زوایای A و C را داریم، با رسم ارتفاع BH مسئله روشن می‌شود و می‌توانیم BH و AC و در نتیجه مساحت مثلث را حساب کنیم.

گام دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویه BHC و AHB به ترتیب داریم:

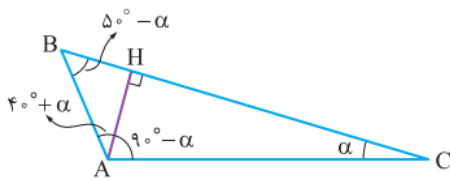
$$\triangle BHC: \begin{cases} \cos \hat{C} = \frac{CH}{BC} = \frac{CH}{40} = \frac{4}{5} \Rightarrow CH = 24 \\ BC = 40, CH = 24 \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} BH = 18 \end{cases}$$

$$\triangle AHB: \tan \hat{A} = \frac{BH}{AH} = \frac{18}{AH} = \frac{3}{2} \Rightarrow AH = 12$$

گام سوم: پس در این مثلث قاعده AC برابر ۳۶ و ارتفاع BH برابر ۱۸ است. پس مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 18 \times 36 = 324$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

**پاسخ تشریحی** گام اول: زوایای شکل را بر حسب α حساب می‌کنیم:

$$\cot \alpha = \frac{CH}{AH}$$

گام دوم: در مثلث AHC داریم:

$$\cos(\alpha + 40^\circ) = \frac{AH}{AB}$$

و همچنین در مثلث AHB داریم:

گام سوم: پس حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$\cot \alpha \cdot \cos(\alpha + 40^\circ) = \frac{CH}{AH} \times \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AB} = \frac{5}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی باید در معادله $x^2 + y^2 = 1$ صدق کند. پس برای نقطه P داریم:

$$(x-1)^2 + (2x)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } \frac{2}{5}$$

که با توجه شکل $x = 0$ غیر قابل قبول است.گام دوم: پس مختصات نقطه P به صورت $P(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ است.

گام سوم: و داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{4}{2}, \cot \alpha = -\frac{2}{4}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -\frac{4}{2} + \frac{2}{4} = -\frac{7}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۰۰

۱۰۱

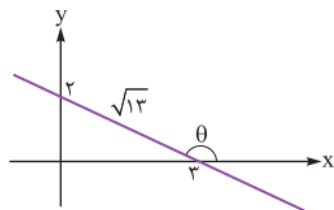
۱۰۲

۱۰۳

پاسخ تشریحی

گام اول: شیب خط داده شده برابر $-\frac{2}{3}$ است، در نتیجه $\tan \theta = -\frac{2}{3}$.

گام دوم: θ زاویه ای منفرجه (در ربع دوم دایره مثلثاتی) است، پس $\sin \theta$ مثبت و $\cos \theta$ منفی است. حال با توجه به شکل مقابل به دست می آید:



$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$T = \sqrt{13} \left(\frac{8}{13\sqrt{13}} - \frac{27}{13\sqrt{13}} \right) = \frac{8}{13} - \frac{27}{13} = -\frac{19}{13}$$

گام سوم: مقدار عبارت T را حساب می کنیم:

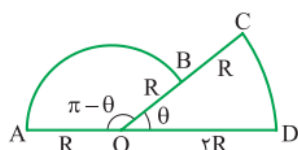
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۰۴

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به درس نامه، ابتدا طول دو کمان AB و CD را به دست می آوریم، طبق شکل زاویه مقابل به کمان CD

برابر θ و زاویه مقابل به کمان AB برابر $\pi - \theta$ است؛ در نتیجه:



$$AB \text{ طول کمان } = R \times (\pi - \theta)$$

$$CD \text{ طول کمان } = 2R \times \theta$$

گام دوم: محیط قطاع های AOB و COD را بر حسب R و θ می نویسیم:

$$AOB \text{ محیط قطاع } = R + R + \underbrace{\text{طول کمان } AB}_{\text{از گام قبل } R(\pi-\theta)} = 2R + R(\pi - \theta)$$

$$COD \text{ محیط قطاع } = 2R + 2R + \underbrace{\text{طول کمان } CD}_{\text{از گام قبل } 2R\theta} = 4R + 2R\theta$$

گام سوم: طبق گفته سؤال، محیط دو قطاع برابر است؛ پس:

$$2R + R(\pi - \theta) = 4R + 2R\theta \xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر } R} 2 + (\pi - \theta) = 4 + 2\theta$$

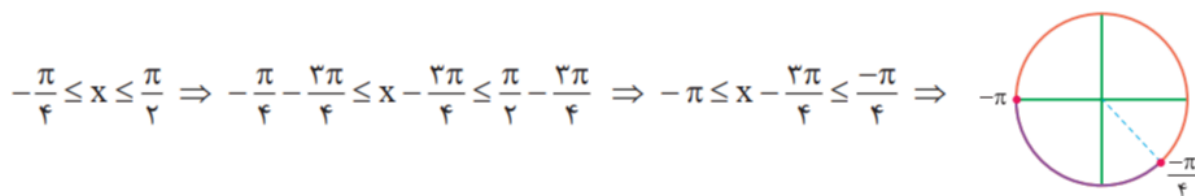
$$\Rightarrow 3\theta = \pi - 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi - 2}{3}$$

پس اندازه θ بر حسب رادیان $\frac{\pi - 2}{3}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۰۵

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ، محدوده $(x - \frac{3\pi}{4})$ را به دست می آوریم و آن را بر روی دایره مثلثاتی نمایش می دهیم:



گام دوم: با توجه به این که $\cos(-\pi) = -1$ و $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ محدوده $\cos(x - \frac{3\pi}{4})$ را می نویسیم:

$$\cos(-\pi) \leq \cos(x - \frac{3\pi}{4}) \leq \cos(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow -1 \leq \cos(x - \frac{3\pi}{4}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام سوم: خواسته سؤال را به دست می آوریم: $0 \leq \cos^2(x - \frac{3\pi}{4}) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\cos^2(x - \frac{3\pi}{4}) \leq 2$ پس $2\cos^2(x - \frac{3\pi}{4})$ متعلق به بازه $[0, 2]$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

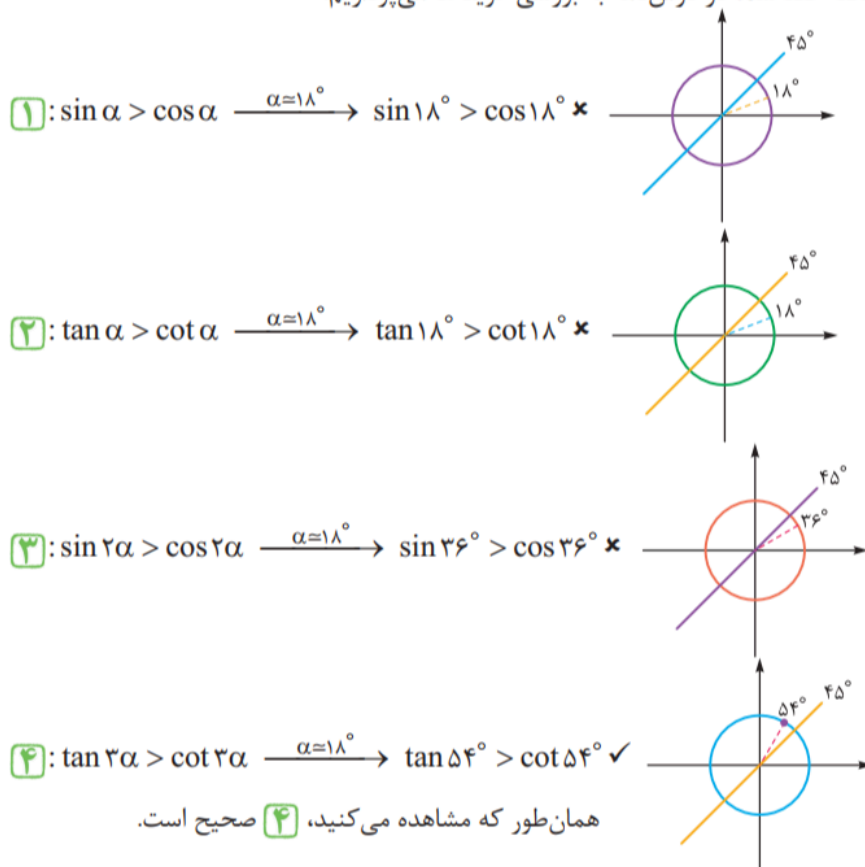
۱۰۶

پاسخ تشریحی گام اول: اندازه زاویه α که در سؤال داده شده است برحسب رادیان است، از آن جا که 2π دقیقاً برابر 360° و هر رادیان تقریباً

برابر 57° است، آن را به درجه تبدیل می کنیم:

$$\alpha = \underbrace{2\pi}_{360^\circ} - 6 \xrightarrow{1R=57^\circ} \alpha = 360^\circ - \underbrace{6(57^\circ)}_{342^\circ} \Rightarrow \alpha \approx 18^\circ$$

گام دوم: با توجه به اندازه به دست آمده برای α و نکته گفته شده در درس نامه به بررسی گزینه ها می پردازیم:



(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۰۷

پاسخ تشریحی

گام اول: زوایای داده شده در عبارت مورد نظر را برحسب $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ می نویسیم و مقدار آن ها را به دست می آوریم:

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin \left(\overbrace{4\pi - \frac{\pi}{3}}^{\text{ربع چهارم}} \right) = \ominus \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{17\pi}{6} = \cos \left(\overbrace{3\pi - \frac{\pi}{6}}^{\text{ربع دوم}} \right) = \ominus \cos \frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{13\pi}{4} = \tan \left(\overbrace{3\pi + \frac{\pi}{4}}^{\text{ربع سوم}} \right) = \oplus \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

گام دوم: مقادیر به دست آمده را در عبارت جای گذاری می کنیم و پاسخ سؤال را به دست می آوریم:

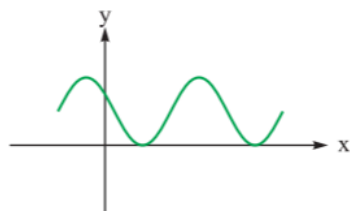
$$\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)(1) = \frac{3}{4} = 0.75$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۰۸

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار تابع، مقدار مینیمم آن برابر صفر است؛ پس با توجه به نتیجه گیری درس نامه خواهیم داشت:



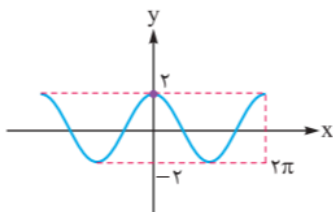
$$f(x) = 3 + a + 2a \sin x \rightarrow \min f = -|2a| + 3 + a$$

$$\xrightarrow{\min f = 0} 0 = -|2a| + 3 + a \Rightarrow |2a| = 3 + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow 2a = 3 + a \Rightarrow a = 3 \\ a < 0 \rightarrow -2a = 3 + a \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

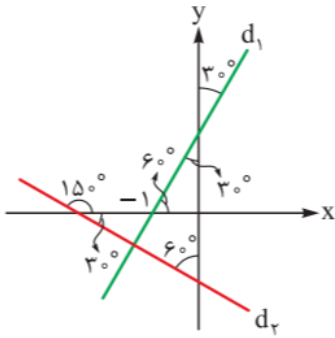
گام دوم: نمودار f در $x = 0$ کاهشی یا نزولی است؛ پس مقدار a نمی تواند برابر ۳ باشد و $a = -1$.

گام سوم: با توجه به $a = -1$ ، ضابطه تابع $y = (1-a)\cos x$ به صورت زیر درمی آید: $y = 2\cos x$ $\xrightarrow{a=-1} y = (1-a)\cos x$



گام چهارم: نمودار $y = 2\cos x$ به شکل زیر است که در گزینه (۳) در بازه $[0, 2\pi]$ نمایش داده شده است:

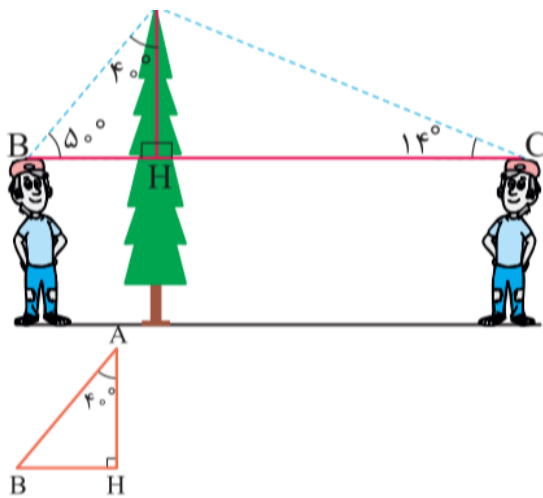
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



مطابق شکل و با در نظر گرفتن مثلث‌های قائم‌الزاویه، زاویه‌هایی که خطوط d_1 و d_2 با جهت مثبت محور x می‌سازند، به ترتیب 6° و 15° هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} d \text{ شیب خط} = m = \tan 6^\circ = \sqrt{3} \\ d' \text{ شیب خط} = m' = \tan 15^\circ = -\tan 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -3$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



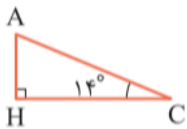
گام اول: دو مثلث قائم‌الزاویه در شکل می‌سازیم:

گام دوم: در مثلث ABH برای زاویه A، کتانژانت می‌نویسیم:

$$\cot \hat{A} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{5}{6} AH$$

$$\cot 14^\circ \approx 4$$

گام سوم: طرفین تساوی $\cos 14^\circ \approx 4 \sin 14^\circ$ را بر $\sin 14^\circ$ تقسیم می‌کنیم:



گام چهارم: در مثلث ACH برای زاویه C، کتانژانت می‌نویسیم:

$$\cot \hat{C} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \Rightarrow 4 = \frac{HC}{AH} \Rightarrow HC = 4AH$$

گام پنجم: طول پاره‌خط BC (فاصله بین دو نفر)، $14/5$ است، پس مجموع BH و HC نیز برابر $14/5$ است.

$$BH + HC = 14/5 \Rightarrow \frac{5}{6} AH + 4AH = \frac{29}{5} \xrightarrow{\times 6} 5AH + 24AH = 29 \times 3 \Rightarrow 29AH = 29 \times 3 \Rightarrow AH = 3$$

ارتفاع درخت برابر با مجموع AH و قد یکی از افراد است:

$$\begin{array}{c} 3 + 1/7 = 4/7 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{AH} \quad \text{قد افراد} \end{array}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۱۱

گام اول: طول هر یک از کمان‌های AB و $A'B'$ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار باید اندازه زاویه $\widehat{AOB}$ را به رادیان تبدیل کنیم.

$$\frac{10^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{9}$$

$$AB \text{ کمان: } \ell = r\theta = 12 \times \frac{5\pi}{9} = \frac{20\pi}{3}$$

$$A'B' \text{ کمان: } \ell' = r'\theta' = r' \times \frac{2\pi}{3}$$

گام دوم: با توجه به فرض سؤال، اختلاف بین طول کمان‌ها برابر 2π است، پس داریم:

$$\ell - \ell' = 2\pi \Rightarrow \frac{20\pi}{3} - r' \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi \xrightarrow{\div 2\pi} \frac{10}{3} - \frac{r'}{3} = 1 \xrightarrow{\times 3} 10 - r' = 3 \Rightarrow r' = 7$$

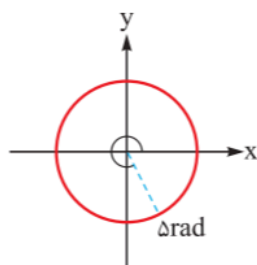
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۱۲

گام اول: مقدار ۵ رادیان تقریباً برابر است با:

$$5 \times 57 / 3^\circ \approx 286^\circ$$

بنابراین انتهای کمان ۵ رادیان در ناحیه چهارم قرار دارد.



گام دوم: با توجه به درس‌بکس و این که $286^\circ = 27^\circ + 16^\circ$ داریم:

$$\pi + \frac{\pi}{4} < 5\text{rad} < \pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow |\tan x| > 1$$

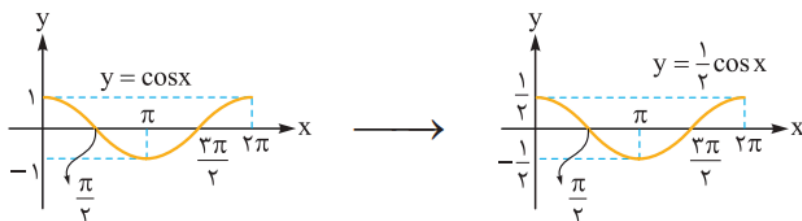
یعنی به ازای ۵ رادیان، $|\tan x|$ بزرگ‌تر از قدرمطلق سایر نسبت‌های مثلثاتی است و در نتیجه مقدار $c = |\tan 5|$ از سایر مقادیر بزرگ‌تر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

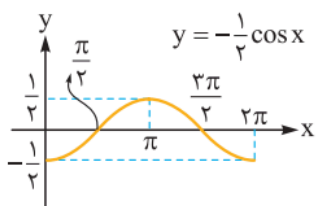
۱۱۳

نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}\cos x + 1$ را از روی نمودار تابع $y = \cos x$ رسم می‌کنیم.

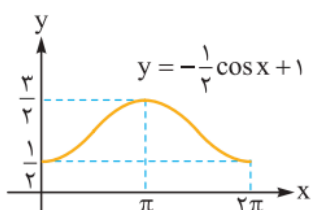
گام اول: عرض نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:



گام دوم: نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



گام سوم: نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

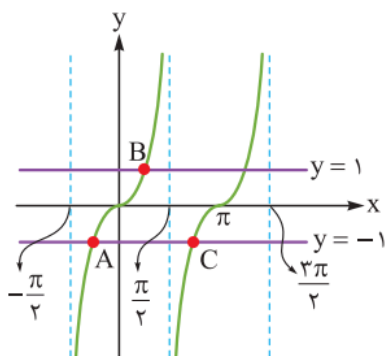


(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۱۴

گام اول: نمودار تابع $y = \tan x$ را در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \pi]$ همراه با نمودار رابطه $|y| = 1$ رسم می‌کنیم تا سه نقطه متوالی برخورد

آنها را پیدا کنیم.



گام دوم: با توجه به شکل، مختصات نقاط A ، B و C عبارت‌اند از:

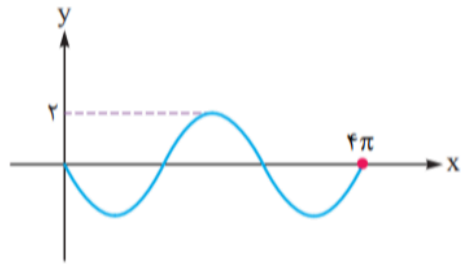
$$A(-\frac{\pi}{4}, -1), B(\frac{\pi}{4}, 1), C(\frac{3\pi}{4}, -1)$$

بنابراین در مثلث ABC ، طول قاعده AC ، برابر π و طول ارتفاع رسم‌شده از رأس B بر این قاعده برابر ۲ است، پس داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \pi \times 2 = \pi$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: می‌دانیم که در تابع به فرم $y = a \sin(bx) + c$ ، ماکزیمم برابر $|a| + c$ است. در تابع داده شده $c = 0$ و از روی نمودار ماکزیمم تابع ۳ است، در نتیجه:



$$|a| + 0 = 2 \Rightarrow |a| = 2$$

گام دوم: می‌دانیم که یک دوره تناوب تابع سینوس به صورت  می‌باشد. در نمودار داده شده یک‌ونیم دوره تناوب از تابع آورده شده است؛ پس دوره تناوب آن برابر می‌شود با:

$$1/5 T = 4\pi \Rightarrow 3T = 8\pi \Rightarrow T = \frac{8\pi}{3}$$

از روی فرمول دوره تناوب توابع سینوسی، $|b|$ را پیدا می‌کنیم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4}$$

گام سوم: باز هم از فرمول دوره تناوب استفاده می‌کنیم تا دوره تناوب تابع $y = \cos\left(\frac{a}{b}x\right)$ را به دست آوریم:

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{a}{b}\right|} \xrightarrow{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{2}{\frac{3}{4}}} T = \frac{2\pi}{\frac{8}{3}} = \frac{3\pi}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: به جای $\cos 2x$ در معادله داده شده می‌نویسیم $1 - 2\sin^2 x$ تا به یک معادله درجه دوم بر حسب $\sin x$ برسیم:

$$1 + \cos 2x = 3 \sin x \Rightarrow 1 + 1 - 2\sin^2 x = 3 \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 9 - (-16) = 25} \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \text{ غ ق} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس $\sin x = -2$ قابل قبول نیست و $\sin x = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

گام دوم: در بازه $(0, 2\pi)$ می‌دانیم که در $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ ، $\sin x = \frac{1}{2}$ است؛ پس معلوم می‌کنیم که ریشه بزرگ‌تر چند برابر ریشه کوچک‌تر است تا خواسته سؤال به دست آید:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} \frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = 5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۱۷

گام اول: نسبت مثلثاتی کسینوس نسبت به علامت کمانش خنثی است، پس علامت b تأثیری در نمودار تابع ندارد.

حال با توجه به آن که تابع انتقال افقی ندارد، وضعیت تابع در $x = 0$ علامت a را مشخص می‌کند، به این ترتیب که اگر در $x = 0$ تابع دارای ماکزیمم باشد، $a > 0$ و اگر دارای مینیمم باشد، $a < 0$ است. با توجه به نمودار صورت سؤال، واضح است که $a > 0$ است.

گام دوم: فاصله هر دو ماکزیمم متوالی در نمودارهای $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$ برابر با یک دوره تناوب تابع است. در این سؤال فاصله $-\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{4\pi}{3}$ برابر با $2/5$ دوره تناوب است:

$$\Rightarrow \frac{5T}{2} = \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

گام سوم: حالا با استفاده از رابطه دوره تناوب داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

که هر دو مقدار ± 3 برای b قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۱۸

گام اول (ساده کردن معادله):

$$\frac{1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x}{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \rightarrow 2 \cos^2 x = 3 \sin x \rightarrow 2 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

گام دوم: $\sin x$ نمی‌تواند کوچک‌تر از -1 باشد. $\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

گام سوم (حل معادله مثلثاتی):

$$\sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

که در بازه $(0, 2\pi)$ تنها $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ جواب‌های معادله هستند.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۱۹

$$S_{ABC} = 2/5 S_{BDF} \Rightarrow$$

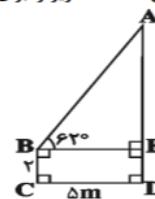
$$\frac{1}{2} \times 7 \times (2 + x + 2) \sin B = 2/5 \times \frac{1}{2} \times 2 \times (7 + x) \sin B \quad 7(4 + x) = 5(7 + x) \Rightarrow 28 + 7x = 35 + 5x \Rightarrow x = 3/5$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

شکل ساده‌شده زیر را برای مسأله در نظر می‌گیریم، با استفاده از تعریف تانژانت زاویه B در مثلث ABE داریم:

۱۲۰

$$\tan \hat{B} = \frac{AE}{BE} = \frac{\hat{B}=62^\circ}{\tan 62^\circ=2} \rightarrow AE = 5 \times 2 = 10 \text{ m} \quad \text{ارتفاع ساختمان} = AD = AE + ED = 10 + 2 = 12 \text{ m}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\sin \alpha + 3 \cos \alpha = 2 \Rightarrow \sin^2 \alpha = (2 - 3 \cos \alpha)^2 \Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 12 \cos \alpha + 9 \Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = 4 + 9 \cos^2 \alpha - 12 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) - 12 \cos \alpha + 3 = 0$$

۱۲۱

$$\Rightarrow 1 + \cos 2\alpha - 12 \cos \alpha + 3 = 0$$

$$\cos 2\alpha - 12 \cos \alpha = -4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

ابتدا تابع داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

۱۲۲

$$f(x) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + 3b$$

با توجه به نکته، داریم:

$$\min = -2 + 3b, \quad T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2b}\right|} = 4|b|$$

حال با توجه به فرض مسئله داریم:

$$4|b| = 2(-2 + 3b) \Rightarrow 2|b| = -2 + 3b \xrightarrow{b>0} 2b = -2 + 3b \Rightarrow b = 2$$

بنابراین ماکزیمم تابع f برابر است با:

$$\max = 2 + 3b \Rightarrow \max = 2 + 6 = 8$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\text{نکته: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

۱۲۳

با توجه به آنکه $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ و $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = |\sin x| + |\cos x|$$

با توجه به فرض سؤال $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ، پس $\sin x < 0$ و $\cos x > 0$ داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin \hat{A}$$

۱۲۴

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \text{مجموع} = \pi$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۲۵ دو طرف تساوی را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$a + \Delta \cot^2 x = \frac{4}{\sin^2 x} = 4(1 + \cot^2 x) \Rightarrow a + \Delta \cot^2 x = 4 + 4 \cot^2 x \Rightarrow a + \cot^2 x = 4$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\cos \alpha + 4 \cos \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -\frac{4}{3} + \frac{3}{4} = -\frac{7}{12}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\begin{aligned} \text{طول کمان در دایره بزرگتر} &= 9\theta \\ \text{طول کمان در دایره کوچکتر} &= 3\theta \end{aligned} \Rightarrow \text{محیط} = 9\theta + 3\theta + 12 = 12\theta + 12$$

$$\text{پس } 12 + 12\theta = 22 \text{ و در نتیجه } \theta = \frac{5}{6}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$4 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (4 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{پس } \cos \alpha = \frac{1}{4} \text{ و در نتیجه } \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ و } \tan^2 \alpha = 15$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۲۹ α و β زوایایی غیرقائم در محدوده $(0^\circ, 180^\circ)$ هستند و سینوس آنها همواره در بازه $(0, 1)$ است و جزء صحیح آنها صفر می‌شود.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$f(x) = \sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)